

Prof.dr hab. Maciej Przanowski

Łódź, 06.03.2025.

Profesor Senior

Instytut Fizyki, Politechnika Łódzka

Wólczańska 219, 90-924 Łódź

**Recenzja rozprawy doktorskiej pani mgr inż. Joanny Piwnik:  
*Zagadnienia propagacji światła w polu grawitacyjnym.***

Mimo, że od powstania teorii grawitacji Einsteina upływa już 110 lat i problem ruchu w polu grawitacyjnym w ramach tej teorii był rozważany już przez jej twórcę Alberta Einsteina i następnie wielu badaczy problem ten ciągle jest aktualny. Można nawet stwierdzić, że zainteresowanie nim ostatnio wzrasta ze względu na coraz dokładniejsze metody eksperymentalne i niezwykle rozwój programów komputerowych umożliwiających przeprowadzanie skomplikowanych operacji matematycznych związanych z rozwiązywaniem równań ruchu. Wydaje się, że większość prac skupia się na wykorzystaniu możliwości komputera aby otrzymywać jak najdokładniejsze rozwiązania tych równań, natomiast rzadziej pojawiają się rozważania prowadzące do nowego spojrzenia na sam problem ruchu w teorii Einsteina i poszukujące zupełnie nowego podejścia do skonstruowania równań ruchu. Właśnie tego rodzaju rozważania tworzą rozprawę doktorską pani Joanny Piwnik. Mówiąc dokładniej praca ta poświęcona jest badaniu propagacji promieni świetlnych w polu grawitacyjnym. Powszechnie wiadomo, że w klasycznej optyce geometrycznej bez obecności pola grawitacyjnego rozchodzenie promienia świetlnego jest określone przez słynną *zasadę Fermata*, która stwierdza, że promień światła między dwoma punktami w przestrzeni porusza się po trajektorii spełniającej warunek stacjonarności całki przedstawiającej czas przejścia promienia z punktu początkowego do końcowego. Zakłada się przy tym stałość częstości światła wzdłuż drogi. Oczywistym pytaniem w ogólnej teorii względności jest,

czy można uogólnić klasyczną zasadę Fermata na przypadek rozchodzenia się światła w polu grawitacyjnym. Nie jest to problem trywialny ponieważ w ogólnym przypadku nie istnieje naturalnie określony czas uniwersalny i w konsekwencji nie wiadomo a priori względem jakiej współrzędnej czasowej założyć stałość częstości. Taki czas uniwersalny istnieje w przypadku stałego pola grawitacyjnego i wówczas względnie łatwo można sformułować zasadę Fermata. Jednak, powtórzmy, w przypadku ogólnym nie jest to oczywiste. Temu właśnie problemowi a następnie problemowi rozwiązania powstałych z zasady Fermata równań poświęcona jest omawiana rozprawa doktorska. Rozdział pierwszy tworzy wstęp do rozprawy, gdzie autorka trafnie opisuje duże znaczenie badania propagacji fal elektromagnetycznych i promieni świetlnych w polu grawitacyjnym dla rozwoju astrofizyki i kosmologii oraz przedstawia strukturę pracy i główne rezultaty. Drugi rozdział poświęcony jest wyprowadzeniu ogólnej zasady Fermata w dowolnym polu grawitacyjnym i zastosowaniu jej w przypadku metryki sferycznie symetrycznej, w szczególności metryki Schwarzschilda-de Sittera oraz w przypadku metryki o symetrii osiowej. Najważniejszym wynikiem tego rozdziału i zresztą całej rozprawy jest w mojej opinii powiązanie ogólnej zasady Fermata z formalizmem zasady wariacyjnej Herglotza dotyczącej układów mechanicznych dla których *uogólniony lagranżjan* w danym momencie zależy także od *uogólnionego działania* liczonego od momentu początkowego do tego momentu. (Dobrze się stało, że autorka zamieściła dość obszerny Dodatek A, gdzie podała najistotniejsze fakty dotyczące formalizmu Herglotza). W przypadku ruchu promienia świetlnego wzdłuż krzywej zerowej można pokazać, że uogólnionym lagranżjanem zależnym od działania jest pochodna  $\frac{dx^0}{d\sigma}$  współrzędnej czasowej  $x^0(\sigma)$  po parametrze  $\sigma \in \langle \sigma_0, \sigma_1 \rangle$  wybranym na tej krzywej, natomiast  $x^0(\sigma)$  jest uogólnionym działaniem (przyjęto  $x^0(\sigma_0) = 0$ ). Zgodnie z istotą zasady wariacyjnej Herglotza trajektoria promienia świetlnego w przedziale parametru  $\langle \sigma_0, \sigma_1 \rangle$  jest wyznaczona z warunku stacjonarności rozwiązania  $x^0(\sigma_1)$  ze względu na wariacje drogi przy ustalonych końcach. Warunek stacjonarności prowadzi do fundamentalnych równań (2.41) i (2.42) wraz z definicją (2.40). Równania te były już otrzymane wcześniej np. w pracy V.P.Frolova z 2013 roku [22], jednak powiązanie tych równań z formalizmem Herglotza jest zasługą autorki rozprawy. Pragnę jeszcze raz podkreślić znaczenie tego rezultatu dla głębszego zrozumienia problemu ruchu w teorii grawitacji zwracając uwagę, że

jak pokazano dalej w rozprawie (podrozdziały 2.4 i 2.5) zasada wariacyjna Herglotza dla ruchu promienia świetlnego może być w naturalny sposób uogólniona na przypadek ruchu cząstek obdarzonych masą oraz dopuszcza elegancki formalizm Hamiltona. Zwróćmy uwagę, że uogólnienie zasady Fermata na dowolne pole grawitacyjne nie jest w żadnym razie problemem akademickim oderwanym od rzeczywistości. Przeciwnie, jest to problem istotny ponieważ czasoprzestrzenie niestacjonarne przynajmniej w pewnych obszarach są fizycznie bardziej realistyczne niż globalnie stacjonarne. Poza tym istotą ogólnej teorii względności jest możliwość stosowania dowolnych układów współrzędnych a zatem zasada Fermata powinna być sformułowana także dla metryk zależnych od współrzędnej czasowej. Wyraźnie pokazane jest to w rozprawie w podrozdziale 2.7 gdzie zasada Fermata została zastosowana do problemu ruchu promienia świetlnego w polu Schwarzschilda-de Sittera. Dokonując odpowiedniej transformacji współrzędnych autorka otrzymuje jawnie zależną od czasu metrykę McVittiego i następnie stosując uogólnioną zasadę Fermata sprowadza równania ruchu dla  $\theta = \frac{\pi}{2}$  do kwadratur. To jest bardzo ciekawy wynik tym bardziej, że metryka McVittiego zawiera w sobie jako przypadek szczególny podstawową w kosmologii metrykę Friedmana-Lemaitre'a-Robertsona-Walkera. Odnoszę tu jeszcze podany w rozprawie w Dodatku E ważny wynik-dowód, że równania ruchu w polu Schwarzschilda-de Sittera są całkowalne w sensie Arnolda-Liouville'a (istnieją cztery niezależne całki ruchu komutujące ze względu na nawiasy Poissona). W pozostałej części omawianego drugiego rozdziału jako przykłady zastosowania uogólnionej zasady Fermata autorka znajduje równania różniczkowe dla trajektorii promienia świetlnego przy  $\theta = \frac{\pi}{2}$  otrzymane z tej zasady w przypadku stałego pola grawitacyjnego o symetrii sferycznej oraz stałego pola o symetrii osiowej. Równania te oczywiście znane już były w literaturze dużo wcześniej, ale w omawianej rozprawie są one konsekwentnie otrzymane z zasady wariacyjnej w wersji Herglotza. Uważam, że cały rozdział 2 rozprawy przedstawia oryginalny wkład do badania ruchu w polu grawitacyjnym łącząc zasadę Fermata z zasadą wariacyjną Herglotza. Wysoką ocenę otrzymanych wyników potwierdza publikacja ich we współautorskim artykule w topowym czasopiśmie fizycznym: J.Piwnik, J.Gonera, P.Kosiński, *Nuclear Physics B*. 1010 (2025) 116744.

Mam jedną uwagę krytyczną dotyczącą rozdziału 2 : mianowicie w podrozdziale 2.8, gdzie rozważana jest metryka o symetrii osiowej autorka podaje jako przykład tej metryki słynną metrykę Kerra poprzez wzory (2.148)-(2.151). Nie podaje jednak interpretacji fizycznej wielkości pojawiających się w tych wzorach,  $m$  i  $k$ , a także definicji nowej zmiennej  $u$  (definicja tej ostatniej pojawia się dopiero w następnym rozdziale we wzorze (3.2).

Równania na trajektorię promienia świetlnego otrzymane w rozdziale 2 są analizowane w następnym trzecim rozdziale, którego rozszerzona wersja opublikowana została w 2024 roku w arXiv:2405.14462 we współautorskiej pracy (J.Piwnik,J.Gonera,P.Kosiński) Mówiąc dokładniej autorka podaje tutaj przybliżone rozwiązania tych równań przy założeniu, że parametr zderzenia  $b$  jest duży (należy to rozumieć: dużo większy od promienia Schwarzschilda,  $b \gg m$ ,  $m = \frac{r_g}{2}$ ). Najpierw rozważa ruch światła w polu Schwarzschilda i polu Reissnera-Nordströma dla  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Zarówno w przypadku pierwszym (równanie (3.11)) jak i drugim ( równanie (3.29)) przy przyjętym założeniu nieliniowe zwyczajne równania różniczkowe drugiego rzędu opisujące trajektorie są równaniami małych drgań anharmonicznych (przy czym rolę czasu przyjmuje zmienna kątowa  $\phi$ ). Autorka proponuje rozwiązanie tych równań w postaci asymptotycznych szeregów perturbacyjnych wykorzystując do tego metodę Lindstedta-Poincarégo, która to metoda umożliwia usunięcie z szeregu wyrazów rezonansowych. (Istota podejścia Lindstedta-Poincarégo zawarta jest w Dodatku D rozprawy). W ostatecznym rachunku podane zostały wzory na kąt odchylenia  $\delta$  promienia świetlnego w postaci wielomianu trzeciego stopnia zmiennej  $\frac{m}{b}$  będącego obcięciem szeregu perturbacyjnego w metodzie Lindstedta-Poincarégo dla ruchu w polu Schwarzschilda (wzór (3.25)) oraz polu Reissnera-Nordströma (formuła (3.43)). Podobna procedura zastosowana w podrozdziale 3.2. do badania propagacji światła w polu osiowo symetrycznym Kerra prowadzi do wzoru (3.65) na kąt odchylenia  $\delta$  w postaci obciętego szeregu perturbacyjnego z dokładnością do wyrazów rzędu  $\left(\frac{m}{b}\right)^3$ . Wszystkie otrzymane tutaj formuły na kąty odchylenia pokrywają się z odpowiednimi formułami otrzymanymi wcześniej przez innych autorów stosujących odmienne metody, które głównie opierają się na wykorzystaniu rozwiązań analitycznych zawierających całki eliptyczne i wykorzystaniu programów komputerowych do

wyznaczenia przybliżonego tych całek. Niewątpliwym osiągnięciem autorki rozprawy jest pokazanie, że w przypadku dużych parametrów zderzenia te same wyniki (przynajmniej do trzeciego rzędu w  $\frac{m}{b}$ ) można otrzymać metodą algebraiczną Lindstedta-Poincarégo.

W związku z tym pojawia się naturalne pytanie, czy wybierając odpowiednio mały parametr ewentualnego szeregu perturbacyjnego można stosować tę metodę także dla dużych kątów odchylenia czyli dla małych parametrów zderzenia. Czy takim parametrem mógłby być np. parametr  $b'$  zdefiniowany wzorem (9) w pracy [49]? Kończąc omawianie tego rozdziału kilka drobnych uwag dotyczących jego redakcji:

(a) Pierwsza zdanie po wzorze (3.1) jest: „Zauważmy, że w równaniu (2.132) ...”; powinno być: „Zauważmy, że w równaniu (3.1) ...”

(b) Pierwsza linijka po wzorze (3.8) jest: „i całka ruchu (2.132)...”;

powinno być : „i całka ruchu (3.1)

(c) Pierwsza linijka pod rysunkiem 3.2 jest: „...rozwiązanie (3.32)” :

powinno być : „...rozwiązanie (3.29)”

(d) Jakie znaczenie ma symbol  $m$  w podstawieniu (3.2)? Czy

$$m = \frac{r_g}{2} ?$$

Następny rozdział 4 jest niezwykle inspirujący i ważny. Jest poświęcony zilustrowaniu jak pewne rezultaty pracy [41] (a także [42]) dotyczące poszukiwania różnych hamiltonianów prowadzących dla danego układu do takich samych obrazów krzywych opisujących ruch (w rozprawie: takich samych *niesparametryzowanych trajektorii*) mogą być zastosowane w wyznaczaniu trajektorii promienia świetlnego w polu grawitacyjnym. Autorka rozprawy rozważa ruch promienia świetlnego w polu Kerra (polu rotującej czarnej dziury) i znajduje odpowiedni równoważny hamiltonian (4.15) do hamiltonianu (4.12) otrzymanego w standardowy sposób z zasady Fermata. Ten nowy hamiltonian (4.15) ma ewidentnie postać dopuszczającą separację zmiennych w równaniu Hamiltona-Jacobiego, a w konsekwencji natychmiast można z niego odczytać dodatkową całkę ruchu, która w istocie jest proporcjonalna do słynnej stałej

*Cartera* znalezionej w 1968 roku. Odkrycie tej stałej, obok istniejącej oczywiście całki energii, dowodzi całkowalności równań ruchu w polu Kerra. Okazało się później udowodnione przez M.Walkera i R.Penrose'a (1970), że istnienie tej stałej jest konsekwencją istnienia tensora Killinga dla metryki Kerra. Niewątpliwym osiągnięciem autorki omawianej rozprawy doktorskiej jest otrzymanie równoważnego hamiltonianu, który natychmiast dowodzi: separowalności równań Hamiltona-Jacobiego, istnienia drugiej, obok hamiltonianu, całki ruchu i całkowalności równań ruchu. Korzystając z tego hamiltonianu mogła autorka szczegółowo przeanalizować graniczne przejście do metryki Schwarzschilda. Na szczególne wyróżnienie zasługują wyniki podrozdziału (4.5) gdzie podano w jawnej postaci równania ruchu dla promienia świetlnego w polu Kerra, które całkowalne są przez rozdzielanie zmiennych. Mają one postać umożliwiającą zastosowanie metody Lindstedta—Poincarégo dla dużych parametrów zderzenia. Dzięki temu autorka znalazła przybliżone rozwiązanie (4.84). Trzeba podkreślić, że ostateczne wyniki dotyczące tego rozdziału prowadzą do znanych już rezultatów( np. [57,58,59]), ale metoda zaproponowana przez panią Piwnik jest oryginalna i łączy miejscami w zaskakujący sposób problem ruchu w ogólnej teorii względności z problemami ruchów anharmonicznych w klasycznej mechanice. Poza tym metoda ta prowadzi do rachunków algebraicznych nie wymagających stosowania funkcji eliptycznych. Główne wyniki podrozdziałów (4.1)-(4.3) pojawiły się w współautorskiej pracy : J.Piwnik,J.Gonera,P.Kosiński, arXiv:2409.11896 [gr-qc].

Rozdział 5, ostatni rozdział rozprawy, chociaż bardzo krótki (2 strony) przedstawia jednak ważny wynik. Pokazuje mianowicie, że korzystając z zasady Fermata można bardzo łatwo udowodnić twierdzenie S.Hoda z 2018 roku [61], które mówi, że czas obiegu z prędkością światła po okręgu w płaszczyźnie równikowej wokół rotującej czarnej dziury Kerra liczony względem obserwatora w nieskończoności jest najmniejszy gdy jest to ruch rzeczywisty promienia świetlnego. Rezultat ten jest na tyle ciekawy, że znalazł uznanie recenzentów znanego czasopisma fizycznego *International Journal of Modern Physics D* i został opublikowany w 2021 roku (J.Gonera,P.Kosiński,J.Piwnik, *Int.J.Mod.Phys.*, D **30** (2021) 2150094).

Podsumowując ocenę strony merytorycznej rozprawy przytoczę słowa autorki zawarte we wstępie: „Przedstawiona rozprawa dotyczy sformułowania zasady Fermata dla dowolnych pól grawitacyjnych i wynikających z nich własności i zastosowań. Położono nacisk na fakt, że zasadę Fermata można zanalizować w ramach (uogólnionej) mechaniki analitycznej i teorii drgań nieliniowych. Pozwala to zastosować zaawansowane metody zapożyczone z tych dziedzin do nowego spojrzenia na propagację światła w polu grawitacyjnym”. Rzeczywiście autorka w sposób konsekwentny prowadzi czytelnika od ogólnego sformułowania zasady Fermata opartego na zasadzie wariacyjnej Herglotza do hamiltonowskiego ujęcia tej zasady i do zastosowania całego formalizmu do znajdowania trajektorii promieni świetlnych w polu o symetrii sferycznej, a następnie, osiowej. Szczególnie głęboka i elegancka pod względem matematycznym jest analiza w polu Schwarzschilda-de Sittera (podrozdział 2.7). Dalsze rozważania autorki dotyczące znajdowania kątów odchylenia promienia w polu czarnej dziury Schwarzschilda, Reissnera-Nordströma czy rotującej czarnej dziury Kerra dla dużych parametrów zderzenia są prowadzone właśnie w duchu analogii z odpowiednimi problemami znanymi w klasycznej mechanice analitycznej przy rozpatrywaniu drgań nieliniowych (oscylator anharmoniczny, metoda Lindstedta—Poincarégo). Dzięki temu rozprawę należy traktować jako zupełnie nowe, nieeksplorowane wcześniej podejście do problemu ruchu w teorii grawitacji. Czy takie właśnie podejście doprowadzi do nowych wyników ważnych w eksperymencie trudno w tej chwili ocenić. Jednak, co pokazano w rozprawie, proponowane metody potrafią przy pomocy bardziej elementarnych, czysto algebraicznych, rachunków zrekonstruować wiele wyników otrzymanych wcześniej innymi metodami. Dlatego też rozprawę pani Piwnik oceniam wysoko od strony merytorycznej. Jak już wspominałem wcześniej główne wyniki rozprawy zostały opublikowane w czterech pracach, z których dwie już ukazały się w prestiżowych czasopismach fizycznych (*Nuclear Physics B* (140 pkt.), *International Journal of Modern Physics D* (100 pkt.)) a pozostałe dwie, opublikowane w arXiv, przesłane zostaną wkrótce do druku.

Mam jedynie dwie drobne uwagi krytyczne dotyczące strony merytorycznej:

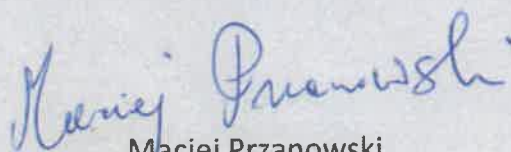
(i) autorka mogła dać więcej przykładów zastosowania zasady Fermata w niestałych polach grawitacyjnych (np. dla prostej i ciekawej w kosmologii metryki Kasnera czy w polu fali grawitacyjnej).

(ii) brakuje choćby krótkiej analizy, czy rozważane metody można zmodyfikować tak, aby obowiązywały w przypadku małych parametrów zderzenia (patrz akapit powyżej, przed uwagą (a)) co jest szczególnie istotne gdy rozpatrujemy ruch w polu czarnych dziur.

Rozprawa napisana jest klarownym językiem. Kolejność rozdziałów i podrozdziałów podlega całkowicie logice rozważań. Oprócz zupełnie drobnych potknięć wymienionych już wcześniej w niniejszej recenzji nie zauważyłem żadnych dodatkowych uchybień natury redakcyjnej.

**Reasumując :** Rozprawę doktorską pani mgr inż. Joanny Piwnik oceniam wysoko. Uważam, że spełnia ona z nawiązką wszystkie wymagania stawiane rozprawom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie mgr inż. Joanny Piwnik do jej publicznej obrony.

Składałem także wniosek o wyróżnienie tej rozprawy. Wniosek ten motywuję bardzo oryginalnym podejściem autorki do problemu propagacji światła w teorii grawitacji opartym na pewnych rezultatach klasycznej mechaniki analitycznej (zasada wariacyjna Hrglotza, małe drgania nieliniowe, rachunek perturbacyjny Lindstedta—Poincarégo ). Autorka zademonstrowała w sposób przekonujący, jak te idee klasycznej mechaniki prowadzą do znanych już wprowadzić wyników jednak znacznie upraszczają manipulacje matematyczne nie wymagając wnikania np. w teorie funkcji eliptycznych. Moje drobne uwagi krytyczne zupełnie nie obniżają znaczenia rozprawy. Ponadto , należy zanotować, że niektóre zagadnienia pracy zostały już wydrukowane w dwóch artykułach w prestiżowych czasopismach fizycznych a dwie następne prace zawierające wyniki rozprawy pojawiły się w arXive i zostaną przesłane do druku w równie znamienitych czasopismach. Uważam , że rozprawa w pełni zasługuje na wyróżnienie.



Maciej Przanowski